3.4 Karekteristik Denklemin kompleks kökleri

a, b, c verilen reel sayılar olmak üzere

$$ay''+by'+cy=0$$

dif. denklemin karekteristik denklemi

$$ar^2+br+c=0$$

kökleri r_1, r_2 reel ve farklı ise $b^2-4ac>0$ dir. Dif. denklemin genel çözümü

$$y=c_1e^{r_1t}+c_2e^{r_2t}$$

dir. Eğer karekteristik denklemin diskiriminantı negatif ise yani $b^2-4ac<0$ ise kökler kompleks eşleniktir. λ ve μ reel sayılar olmak üzere kompleks kökleri

$$r_1=\lambda+i\mu \ , \ r_2=\lambda-i\mu$$

ile gösterelim. Bu durumda çözümler

$$y_1=e^{(\lambda+i\mu)t} \quad \text{ve} \quad y_2=e^{(\lambda-i\mu)t}$$

şeklinde olacaktır. Şimdi eksponansiyelin kompleks kuvvetinin

anlamına bakalım.

$t=0$ da e^t'nin Taylor serisi

$$e^t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}$$

dir. $i^2=-1$, $i^3=-i$ $i^4=1$ olduğuna göre t yerine it yazalım.

$$e^{it}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(it)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!}+i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}t^{2n-1}}{(2n-1)!} \qquad (3.9)$$

olacaktır. $t=0$'da $\cos t$'nin Taylor serisini yazarsak bu (3.9)'un sağındaki birinci seridir. Aynı şekilde (3.9)'un sağındaki ikinci seri $t=0$'da $\sin t$'nin Taylor serisidir. Buna göre e^{it}'yi

$$e^{it}=\cos t+i\sin t$$

şeklinde yazabiliriz. Buna Euler denklemi denir. Euler denklemine göre dif. denklemin y_1 ve y_2 çözümleri

$$y_1=e^{(\lambda+i\mu)t}=e^{\lambda t}(\cos\mu t+i\sin\mu t)$$

$$y_2=e^{(\lambda-i\mu)t}=e^{\lambda t}(\cos(\mu t)-i\sin(\mu t))$$

şeklinde yazabiliriz. Dif. denklemin katsayıları reel olduğundan reel çözümler beklenir. y_1 ve y_2 dif. denklemin çözümü olduğundan y_1+y_2 ve y_1-y_2'de çözümdür.

$$y_1+y_2=2e^{\lambda t}\cos(\mu t)$$

$$y_1-y_2=2ie^{\lambda t}\sin(\mu t)$$

bunların $\frac{1}{2}$ ve $\frac{1}{2i}$ katsayıları ile çarpımlarıda çözümdür.

$$u(t)=e^{\lambda t}\cos(\mu t) \ , \ v(t)=e^{\lambda t}\sin(\mu t)$$

Bu çözümlerin temel çözüm kümesi olup olmadığını araştıralım.

$$W(u,v)(t)=\begin{vmatrix} e^{\lambda t}\cos\mu t & e^{\lambda t}\sin\mu t \\ e^{\lambda t}(\lambda\cos\mu t-\mu\sin\mu t) & e^{\lambda t}(\lambda\sin\mu t+\mu\cos\mu t)\end{vmatrix}$$

$$=\mu e^{2\lambda t}$$

Kökler kompleks eşlenik olduğundan $\mu\neq 0$ olmalıdır. Buna göre

$$W(u,v)\neq 0$$

dir. Yani u ve v temel çözüm kümesidir. Karakteristik denklemin kökleri kompleks eşlenik ise dif. denklemin genel çözümü

$$y=c_1e^{\lambda t}\cos\mu t+c_2e^{\lambda t}\sin\mu t$$

dir.

Örnekler: 1) $y''-2y'+6y=0$ dif. denklemin genel çözümünü bulunuz.

Bu dif. denklemin karekteristik denklemi

$$r^2-2r+6=0$$

ve kökleri

$$r_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4-24}}{2}=\frac{2\pm 2\sqrt{5}i}{2} \quad r_1=1+\sqrt{5}i, \ r_2=1-\sqrt{5}i \quad \lambda=1, \ \mu=\sqrt{5}$$

dir. Genel çözüm

$$y=c_1e^{t}\cos\sqrt{5}t+c_2e^{t}\sin\sqrt{5}t$$

dir.

2) $4y''+9y=0$ dif. denklemin genel çözümünü bulunuz.

$$4r^2+9=0 \Rightarrow r^2=-\frac{9}{4} \quad r_1=-\frac{3}{2}i, \quad r_2=\frac{3}{2}i \qquad \lambda=0, \quad \mu=\frac{3}{2}$$

Genel çözüm

$$y=c_1\cos\tfrac{3}{2}t+c_2\sin\tfrac{3}{2}t$$

dir.

3) $y''+4y'+5y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$ başlangıç değer problemini çözünüz.

$$r^2+4r+5=0 \Rightarrow r_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{16-20}}{2} \quad r_1=-2+i, \quad r_2=-2-i \qquad \lambda=-2, \quad \mu=1$$

Genel çözüm

$$y=c_1e^{-2t}\cos t+c_2e^{-2t}\sin t$$

dir.

$t=0$, $y=1$ $\quad 1=c_1$

$$y'=e^{-2t}(-2c_1\cos t-c_1\sin t)+e^{-2t}(-2c_2\sin t+c_1\cos t)$$

$t=0$, $y'=0 \Rightarrow 0=-2c_1+c_2 \Rightarrow c_2=2$

$$y=e^{-2t}\cos t+2e^{-2t}\sin t$$

dır.

3.5 Katlı kökler ve Mertebe Düşürme

a, b, c reel sayılar olmak üzere

$$ay''+by'+cy=0$$

dif. denklemin karekteristik denklemi

$$ar^2+br+c=0$$

kökleri reel ve katlı ise (yani $r_1=r_2$ ise) $b^2-4ac=0$ dır. $r_1=r_2=-\frac{b}{2a}$ dır. Bu durumda bir çözüm

$$y_1(t)=e^{r_1t}=e^{-\frac{b}{2a}t}$$

dir. Burada zorluk ikinci çözümü bulmaktır. İkinci çözüm y_1'in bir katı olmamalıdır.

örnek: $y''-2y'+y=0$ dif. denklemini çözmeye çalışalım.
Bu denklemin karekteristik denklemi

$$r^2-2r+1=(r-1)^2=0 \Rightarrow r_1=r_2=1 \text{ dir.}$$

Bir çözüm $y_1(t)=e^t$ dir. İkinci çözümü bulmanın birkaç yolu vardır. Biz d'Alembert'in bulduğu yöntemi kullanacağız. cy_1 de çözümdür. Burada c'yi t'ye bağlı bir fonksiyon olarak düşünürsek

$$y=v(t)y_1(t)=vy_1$$

yazarak çözümü bulabiliriz. Buna göre

$$y=ve^t$$
$$y'=v'e^t+e^tv$$
$$y''=v''e^t+2v'e^t+e^tv$$

dif. denklemde yerine konursa

$$y''-2y'+y=v''e^t+2v'e^t+e^tv-2v'e^t-2e^tv+ve^t=e^tv''=0$$

$$v''=0$$

elde edilir.

$$v'=c_1 \Rightarrow v=c_1t+c_2$$

$$y=v.y_1=(c_1t+c_2)e^t$$
$$=c_1te^t+c_2e^t$$

$y_2=te^t$ olmalıdır.

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} e^t & te^t \\ e^t & e^t(1+t) \end{vmatrix}=e^{2t}\neq 0$$

y_1 ve y_2 temel çözümlerdir. Gerçekten genel çözüm

$$y=c_1te^t+c_2e^t$$

dir.

Genel halde

$$y_1(t)=e^{r_1t}=e^{-\frac{b}{2a}t}$$

dir.

$$y=v(t)e^{-\frac{b}{2a}t}$$

alınır ve y', y'' dif. denklemde yerine yazılırsa

$$V''=0$$

çıkar. $V=c_1t+c_2$

dir. $y=c_1te^{-b/2a\,t}+c_2e^{-\frac{b}{2a}t}$

dir. $y_2(t)=te^{-\frac{b}{2a}t}$

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2\\ y_1' & y_2'\end{vmatrix}=e^{-\frac{b}{a}t}\neq 0$$

olduğundan y_1 ve y_2 temel çözümlerdir. Genel çözüm

$$y=c_1te^{-\frac{b}{2a}t}+c_2e^{-\frac{b}{2a}t}$$

dir.

Örnek: $9y''-12y'+4y=0$, $y(0)=2$, $y'(0)=-1$ başlangıç değer problemini çözünüz.

$$9r^2-12r+4=(3r-2)^2=0 \Rightarrow r_1=r_2=\frac{2}{3}$$

genel çözüm

$$y=c_1te^{\frac{2}{3}t}+c_2e^{2/3t}$$

dir.

$$t=0,\ y=2 \Rightarrow 2=c_2$$

$$y'=c_1e^{2/3t}+c_1te^{2/3t}\frac{2}{3}+\frac{2}{3}c_2e^{2/3t}$$

$$t=0,\ y'=-1 \Rightarrow -1=c_1+\frac{2}{3}c_2 \Rightarrow c_1=-\frac{7}{3}$$

$$y=-\frac{7}{3}te^{2/3t}+2e^{2/3t}$$

dir.

Özet: a,b,c reel sayılar olmak üzere

$$ay''+by'+cy=0$$

dif. denkleminin karakteristik denklemi

$$ar^2+br+c=0$$

kökleri i) reel ve birbirinden farklı ise ($r_1\neq r_2$ ise) genel çözüm

$$y=c_1e^{r_1t}+c_2e^{r_2t}$$

dir.

ii) kökler kompleks eşlenik ise ($r_{1,2}=\lambda\pm i\mu$) genel çözüm

$$y=c_1e^{\lambda t}\cos\mu t+ie^{\lambda t}\sin\mu t$$

dir.

iii) kökler reel ve katlı ise ($r_1=r_2$ ise) genel çözüm

$$y=c_1te^{r_1t}+c_2e^{r_1t}$$

dir.

Mertebe Düşürme:

$$y''+p(t)y'+q(t)y=0 \qquad (3.11)$$

homojen dif. denkleminin her yerde sıfır olmayan bir çözümünü biliyorsak ikinci çözümü katlı kökte yaptığımız gibi bulabiliriz. y_1 bir çözüm ise cy_1 de çözümdür. Eğer c'yi t'ye bağlı fonk. olarak düşünürsek

$$y=V(t)y_1(t)=Vy_1$$

şeklinde çözümü bulabiliriz.

$$y'=V'y_1+Vy_1'$$

$$y''=V''y_1+2V'y_1'+Vy_1''$$

(3.11)'de yerine konursa

$$y_1V''+(2y_1'+py_1)V'+(y_1''+py_1'+qy_1)V=0$$

elde ederiz. y_1, (3.11)'in bir çözümü olduğundan

$$y_1''+py_1'+qy_1=0$$

dır. Buna göre

$$y_1 v'' + (2y_1' + p y_1) v' = 0$$

olacaktır. v' fonksiyonuna göre 1. mertebeden lineer dif. denklemdir. Bu denklemi çözerek v' bulunur. v' integre edilerek V bulunur. Böylece çözüm bulunur.

Örnek: 1) $y_1 = t^2$ çözümü ile verilen

$$t^2 y'' - 4t y' + 6y = 0 \quad t>0$$

dif. denkleminin ikinci çözümünü bulunuz.

$$y = t^2 V$$
$$y' = 2tV + t^2 V'$$
$$y'' = t^2 V'' + 4t V' + 2V$$

denklemde yerine konursa

$$t^2 y'' - 4t y' + 6y = t^2(t^2 V'' + 4t V' + 2V) - 4t(2tV + t^2 V') + 6t^2 V$$
$$= t^4 V'' = 0 \quad t \neq 0$$
$$V'' = 0 \Rightarrow V' = c_1 \Rightarrow V = c_1 t + c_2$$
$$y = t^2(c_1 t + c_2) = c_1 t^3 + c_2 t^2$$

$$y_2(t) = t^3$$

dir.

2) $y_1(x) = \sin x^2$ çözümü ile verilen

$$xy'' - y' + 4x^3 y = 0 \quad x>0$$

dif. denkleminin ikinci çözümünü bulunuz.

$$y = \sin x^2 . V$$
$$y' = 2x\cos x^2 . V + \sin x^2 . V'$$
$$y'' = V'' \sin x^2 + 4x\cos x^2 V' + (2\cos x^2 - 4x^2 \sin x^2) V$$

denklemde yerine yazılırsa

$$xy'' - y' + 4x^3 y = x\sin x^2 V'' + 4x^2\cos x^2 V' + (2x\cos x^2 - 4x^3 \sin x^2) V$$
$$- 2x\cos x^2 V - \sin x^2 V' + 4x^3 \sin x^2 V$$
$$= x\sin x^2 V'' + (4x^2\cos x^2 - \sin x^2) V' = 0$$

$x>0 \quad \sin x^2 \neq 0$

$$\frac{V''}{V'} = \frac{1}{x} - 4x \frac{\cos x^2}{\sin x^2}$$

$$\ln v' = \ln x - 2\ln \sin x^2 + \ln c_1$$
$$= \ln \frac{x}{(\sin x^2)^2} c_1$$
$$v' = \frac{x}{(\sin x^2)^2} c_1$$
$$V = -\frac{1}{2} \frac{\cos x^2}{\sin x^2} c_1 + c_2$$
$$V = k \frac{\cos x^2}{\sin x^2} + c_2$$
$$y = \sin x^2 \left(k \frac{\cos x^2}{\sin x^2} + c_2 \right) = k\cos x^2 + c_2 \sin x^2$$
$$y_2 = \cos x^2$$

dir.